الإشتقاق
و
دراسة الدوال

I. اشتقاق دالة في نقطة:

تعريف:

نقول ان دالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = \ell$

أو $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$

العدد ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0. و نكتب $\ell = f'(x_0)$

ملاحظة:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فان معادلة مماس المنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 هي:

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

II. الدالة المشتقة:

مشتقات الدوال الاعتيادية:

$f(x)$	$f'(x)$	المجال
k	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$

العمليات على الدوال المشتقة:

الدالة	مشتقتها	الشرط
$u+v$	$u'+v'$	
$k \cdot u$	$k \cdot u'$	
$u \cdot v$	$u'v+uv'$	
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u لا تنعدم في I
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v+uv'}{v^2}$	v لا تنعدم في I
$u^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$nu^{n-1}u'$	

III. رتابة دالة و إشارة مشتقتها:

خاصية:

I مجال من $\mathbb{R}$ و f دالة قابلة للاشتقاق على I.

- f ثابتة على I $\Leftrightarrow f'(x)=0$ لكل x من I.
- f تزايدية على I $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ لكل x من I.
- f تناقصية على I $\Leftrightarrow f'(x)\leq 0$ لكل x من I.

ملاحظة: f قابلة للاشتقاق على المجال I.

إذا انعدمت $f'(x)$ في x_0 مغيرة اشارتها بالمرور من فان f تقبل مطرافا في x_0.

IV. نهايات دالة:

نهاية دالة حدودية في $+\infty$ أو في $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\quad(c\neq 0)$$

و نهاية الدالة $x\to\frac{ax+b}{cx+d}$ في $-\frac{d}{c}$ هي $+\infty$ أو في $-\infty$.

ملاحظة:

- إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$ فان المستقيم ذا المعادلة $y=\ell$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).
- إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ فان المستقيم ذا المعادلة $x=x_0$ مقارب عمودي.

V. المعادلة و المتراجحة:

f دالة عددية و (C_f) منحناها و c عدد حقيقي.

- حلول المعادلة $f(x)=c$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم $y=c$.
- حلول المتراجحة $f(x)=c$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) تحت المستقيم $y=c$.
- حلول المتراجحة $f(x)=c$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) فوق المستقيم $y=c$.

مثال 1 : <u>دراسة دالة حدودية:</u>

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. حدد أرتوب مركز تماثل منحنى الدالة f علما أن أفصولها يساوي 1.
2. حدد حيز الدراسة و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على حيز الدراسة.
4. أنشئ منحنى الدالة f.
5. حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ على المجال $]-\infty,1]$.

<u>الحل:</u>

1. الدالة f حدودية يعني معرفة على $\mathbb{R}$, و يعني أن مركز تماثل (C_f) ينتمي اليه.

فإذا كان أفصول مركز التماثل هو 1 فان أرتوبه هو $f(1)=2$.

2. حيز دراسة الدالة f هو $D=[1,+\infty[$.

و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

3. لكل x من $[1,+\infty[$: $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=3x^2-6x$

يعني: $f'(x)=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ يعني $3x(x-2)=0$

يعني $x=0$ أو $x=2$

جدول إشارة $f'(x)$

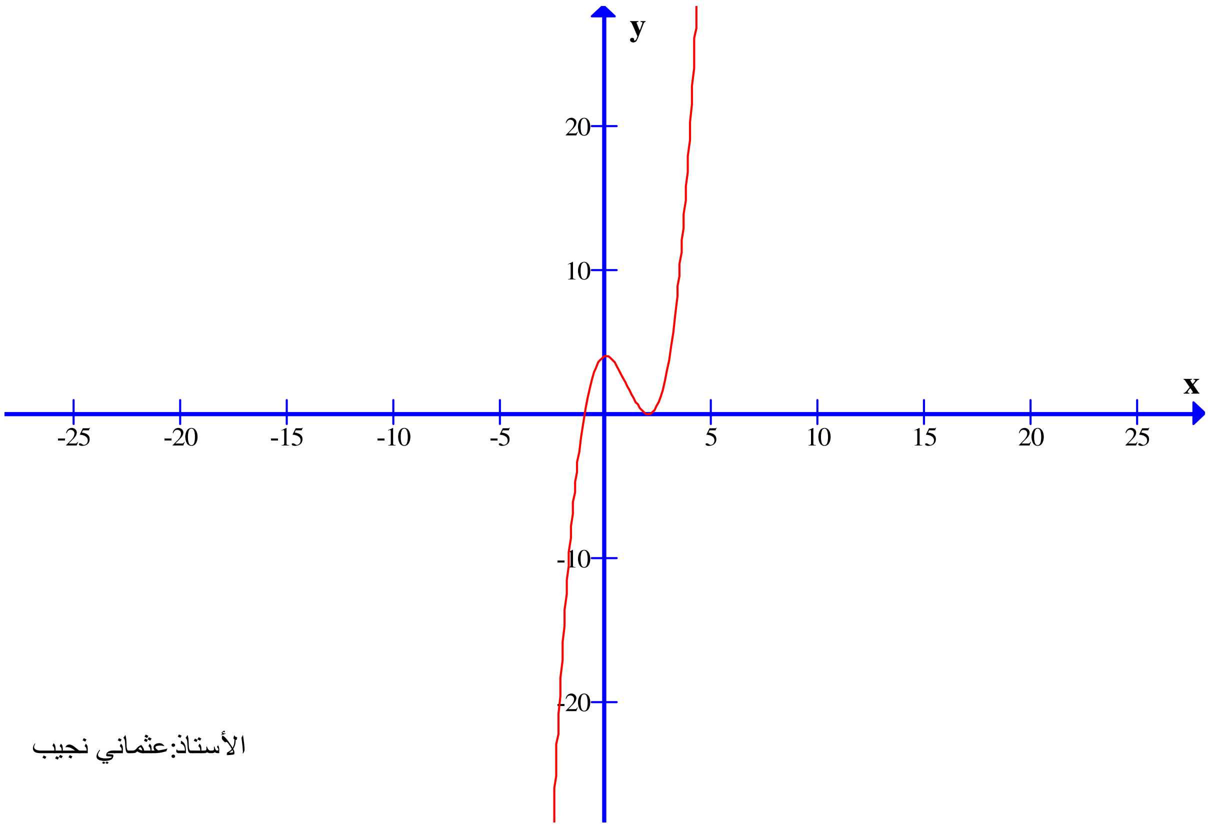
x	1		2		$+\infty$
$3x$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f.

x	1		2		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	2	↘	0	↗	$+\infty$

4. التمثيل المبياني للدالة f.

نبدأ برسم المنحنى على المجال $]1,+\infty[$ ثم نستعمل التماثل المركزي الذي مركزه $I(1,2)$ لإتمام المنحنى على $\mathbb{R}$.



الأستاذ:عثماني نجيب

5. مبيانيا, نلاحظ أن المستقيم ذا المعادلة $y=3$ يقطع المنحنى (C_f) مرتين على المجال $]-\infty,1]$.

و منه المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلين على المجال $]-\infty,1]$.

مثال 2 : <u>دراسة دالة متخاطة:</u>

نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g.
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.
4. أنشئ منحنى الدالة g.
5. حل مبيانيا المتراجحة $-2 \prec g(x) \prec 2$.

الحل:

1. حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$

و منه $D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+2}{x-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى.

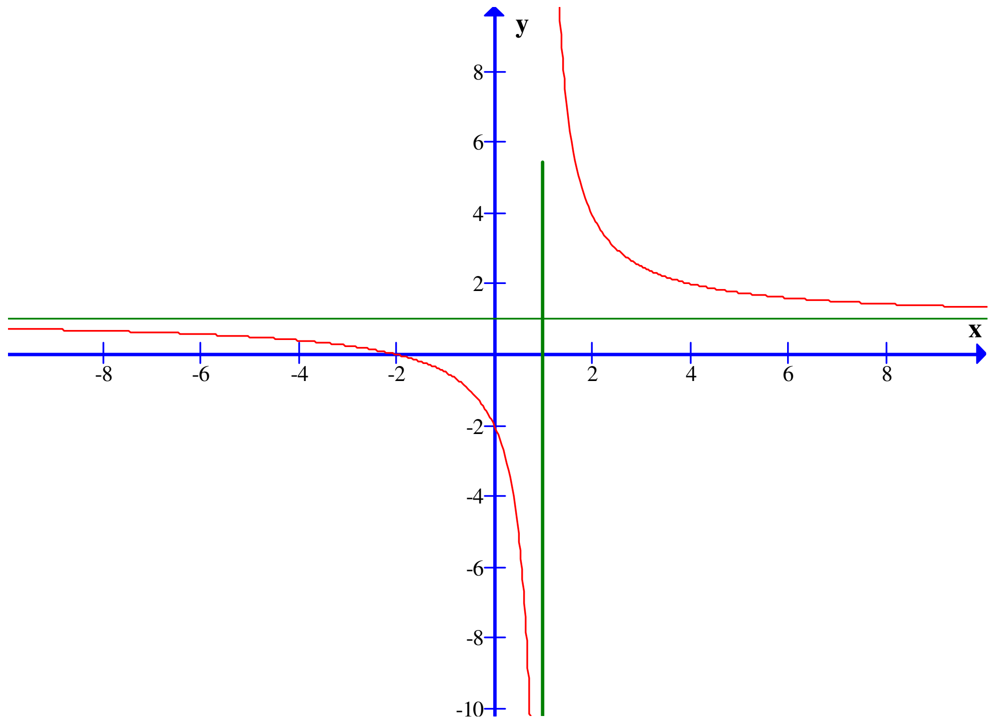
3. لكل x من D لدينا: $g'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\, g'(x)\prec 0$

<u>جدول تغيرات الدالة.</u>

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	‖	-	
$g(x)$	1	↘ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↘	1

4. منحنى الدالة g.



5. لدينا $g(4)=2$ و $g(0)=-2$

مجموعة حلول المتراجحة $-2\prec g(x)\prec 2$ هي:

$S=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$

VI. دراسة الدالة $x\mapsto\sqrt{ax+b}\,(a\neq0)$:

1. مجموعة تعريف الدالة $x\mapsto\sqrt{ax+b}\,(a\neq0)$:

مجموعة تعريف الدالة $f:x\mapsto\sqrt{ax+b}\,(a\neq0)$ هي:

- $D_f = \left]-\frac{b}{a},+\infty\right[$ إذا كان $a \succ 0$
- $D_f = \left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[$ إذا كان $a \prec 0$

في جميع الحالات يجب أن يكون $ax+b \geq 0$.

2. نهايات الدالة $x \mapsto \sqrt{ax+b}\ (a \neq 0)$ **:**

- إذا كان $a \succ 0$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{ax+b} = +\infty$
- إذا كان $a \prec 0$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{ax+b} = +\infty$.

لدينا: $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ في الحالتين.

3. اشتقاق الدالة $x \mapsto \sqrt{ax+b}\ (a \neq 0)$ **:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{ax+b}\ (a \neq 0)$

- إذا كان $a \succ 0$ فان الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$ و قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{b}{a},+\infty\right[$

فان: $\left(\forall x \in \left]-\frac{b}{a},+\infty\right[\right) f'(x) \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

- إذا كان $a \prec 0$ فان الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$ و قابلة للاشتقاق على $\left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[$ فان: $\left(\forall x \in \left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[\right) f'(x) \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

إذا كان $a \succ 0$ فان $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \succ 0$ يعني $f'(x) \succ 0$.
إذا كان $a \prec 0$ فان $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \prec 0$ يعني $f'(x) \prec 0$.

4. جدول تغيرات الدالة $x \mapsto \sqrt{ax+b}\ (a \neq 0)$ **:**

حالة $a \prec 0$

x	-b/a	+∞
f'(x)	||	+
f(x)	0	+∞ ↗

حالة $a \prec 0$

x	-∞	-b/a
f'	-	||
f(x)	+∞ ↘	0

ملاحظة : الرمز || يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$

مثال: لدراسة الدالة من قبيل $x \mapsto \sqrt{ax+b}\ (a \neq 0)$ **:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{3x-5}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة في النقطة $\frac{5}{3}$ على اليمين.
4. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f.
5. أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و $f(7)$.
6. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الحل:

1. $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $3x-5\geq 0$ يعني $3x\geq 5$ و منه $x\geq \frac{5}{3}$

يعني حيز تعريف الدالة f هو: $D=\left[\frac{5}{3},+\infty\right[$

2. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{3-\frac{5}{x}}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}=$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

3. نحسب النهاية $\lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{5}{3}\right)}{x-\frac{5}{3}}$

لدينا: $\frac{f(x)-f\left(\frac{5}{3}\right)}{x-\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{3x-5}-0}{x-\frac{5}{3}}=\frac{3\sqrt{3x-5}}{3x-5}=\frac{3}{\sqrt{3x-5}}$

لدينا: $\lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+}\sqrt{3x-5}=0$ و $\left(\forall x\succ\frac{5}{3}\right):\sqrt{3x-5}\succ 0$ ومنه $\lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{5}{3}\right)}{x-\frac{5}{3}}=+\infty$

هذا يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $\frac{5}{3}$ على اليمين.

4. لدينا: $\left(\forall x\in\left]\frac{5}{3},+\infty\right[\right)f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

بما أن $\frac{3}{2}\succ 0$ و $\sqrt{3x-5}\succ 0$ فان: $f'(x)\succ 0$.

جدول التغيرات:

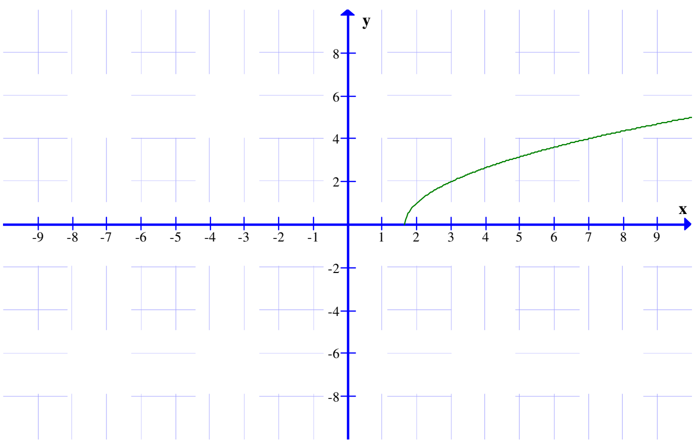
x	5/3	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

5. **لدينا:** $f(2)=\sqrt{3\times 2-5}=\sqrt{1}=1$

و $f(3)=\sqrt{3\times 3-5}=\sqrt{4}=2$

و $f(7)=\sqrt{3\times 7-5}=\sqrt{16}=4$

6. **التمثيل المبياني:**



$f\left(\frac{5}{3}\right)=0$ يعني أن النقطة $A\left(\frac{5}{3},0\right)$ تنتمي ل (C_f).

$f(2)=1$ يعني أن النقطة $B(2,1)$ تنتمي ل (C_f).

$f(3)=2$ يعني أن النقطة $B(3,2)$ تنتمي ل (C_f).

$f(7)=4$ يعني أن النقطة $B(7,4)$ تنتمي ل (C_f).